Insiemi Stabili di Famiglie di Grafi tramite Automi a Stati Finiti

Giovanna J. Lavado

in collaborazione con:
P. Codara, O.M. D'Antona e M. Galasi

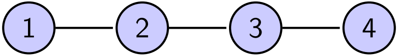
Università degli Studi di Milano

15 Gennaio, 2016

$G = (V, E)$

Insieme indipendente [Codara&D'Antona '13]

Un *insieme indipendente di un grafo G* è un sottoinsieme di V che non contiene nodi adiacenti.



$\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}$

Per ogni $n, h, k \geq 0$, [Hoggatt '70]

$$P^{(h)}_{n,k} = \binom{n - hk + h}{k}$$

$h = 1$

$P^{(1)}_{n,k} =$

	$k = 0$	1	2	3	4	5
$n = 0$	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0
4	1	4	3	0	0	0
5	1	5	6	1	0	0

n	0	1	2	3	4	5	6	7
IND_n	1	2	3	5	8	13	21	34

Motivazioni e ricerca

Problemi NP-completi:

- Determinare se un grafo possiede un insieme indipendente di una data cardinalità.
- Trovare il massimo insieme indipendente dato un grafo.

Problemi combinatori:

- Problema dell'enumerazione degli insiemi indipendenti di potenze di cammini e circuiti.[Hoggatt '70, Codara&D'Antona '13]
- Numero di insiemi indipendenti di una supergriglia. [Calkin&Wilf '98]

Il nostro obiettivo

Cerchiamo una biiezione tra gli *insiemi indipendenti* di famiglie di grafi e le *parole accettate da un automa a stati finiti*.

Preliminari: linguaggi regolari

Grammatica regolare

$$G = (V, \Sigma, S, P)$$

- V è un insieme finito detto insieme delle *variabili*.
- Σ è un insieme finito detto insieme dei *terminali* tale che $V \cap \Sigma = \varnothing$.
- $S \in V$ è il *simbolo iniziale* o *assioma* della grammatica.
- P è un insieme finito di regole o *produzioni* della forma $A \to a$, $A \to aB$ dove $A, B \in V$, $a \in \Sigma$.

$$L(G) = \left\{ w \in \Sigma^* \mid S \overset{*}{\Rightarrow} w \right\}$$

Automata a stati finiti

$$M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$$

- Q è un insieme finito detto insieme degli *stati*.
- Σ è l'*alfabeto dell'input*.
- δ è la *funzione transizione* così definita $\delta : Q \times \Sigma \to Q$.
- $q_0 \in Q$ è lo *stato iniziale*.
- $F \subseteq Q$ insieme degli *stati finali*.

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) \in F\}$$

$\Sigma = \{e, a\}$

$$L = \{\lambda, e, a, ee, ea, ae, eee, aea, eae, eea, \ldots\}$$

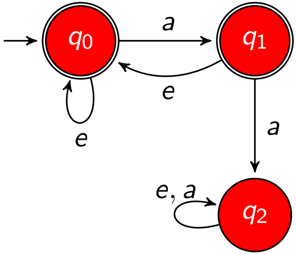
Fattore vietato: aa

- La grammatica regolare G

$$S \to eS \mid aA \mid \lambda$$
$$A \to eS \mid \lambda$$

$$S \Longrightarrow aA \Longrightarrow aeS \Longrightarrow ae$$

- L'automa a stati finiti M



Linguaggi regolari

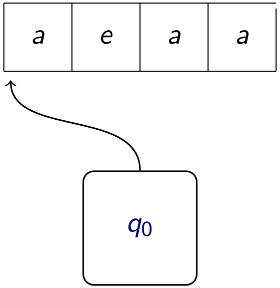
$\Sigma = \{e, a\}$

$$L = \{\lambda, e, a, ee, ea, ae, eee, aea, eae, eea, \ldots\}$$

Fattore vietato: aa

Automa a stati finiti M

Input: $w \in \Sigma^*$
Domanda: $w \in L(M)$?
Risposta: Sì / No

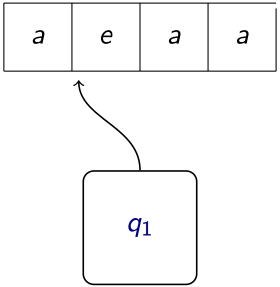


Linguaggi regolari

$\Sigma = \{e, a\}$

$$L = \{\lambda, e, a, ee, ea, ae, eee, aea, eae, eea, \ldots\}$$

Fattore vietato: *aa*



Automa a stati finiti M

Input: $w \in \Sigma^*$

Domanda: $w \in L(M)$?

Risposta: Sì / No

Linguaggi regolari

$\Sigma = \{e, a\}$

$$L = \{\lambda, e, a, ee, ea, ae, eee, aea, eae, eea, \ldots\}$$

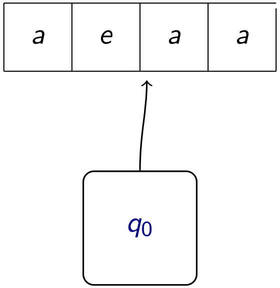
Fattore vietato: aa

Automa a stati finiti M

Input: $w \in \Sigma^*$

Domanda: $w \in L(M)$?

Risposta: Sì / No

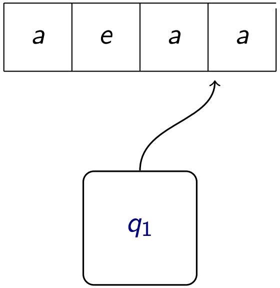


Linguaggi regolari

$\Sigma = \{e, a\}$

$$L = \{\lambda, e, a, ee, ea, ae, eee, aea, eae, eea, \ldots\}$$

Fattore vietato: *aa*



Automa a stati finiti M

Input: $w \in \Sigma^*$

Domanda: $w \in L(M)$?

Risposta: Sì / No

Linguaggi regolari

$\Sigma = \{e, a\}$

$$L = \{\lambda, e, a, ee, ea, ae, eee, aea, eae, eea, \ldots\}$$

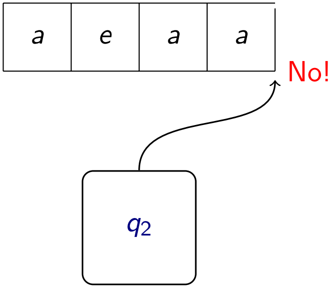
Fattore vietato: aa

Automa a stati finiti M

Input: $w \in \Sigma^*$

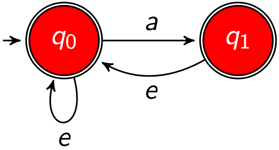
Domanda: $w \in L(M)$?

Risposta: Sì / No



Biiezione

$\Longleftrightarrow$

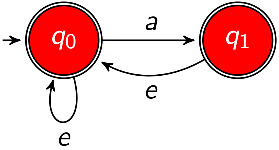


?

Le loro funzioni generatrici coincidono!!!

Biiezione

$\Longleftrightarrow$



?

Le loro funzioni generatrici coincidono!!!

$G_{m,n}$

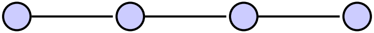
Matrice di trasferimento [Calkin&Wilf '98]

La *matrice di trasferimento* T di una supergriglia $G_{m,n}$ è una matrice $Fib_{m+1} \times Fib_{m+1}$ (tante righe e tante colonne quante siano gli insiemi indipendenti del cammino verticale della supergriglia) tale che:

$$T[i,j] = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \text{ forma un insieme indipendente} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$Fib_0 = 1, Fib_1 = 1, \forall m > 1, Fib_m = Fib_{m-1} + Fib_{m-2}$$

Metodo di Calkin e Wilf: funzione generatrice



Prendendo una delle colonne abbiamo due insiemi indipendenti:

1. L'insieme vuoto (codificato con la lettera e).
2. Il singoletto (codificato con la lettera a).

$$T = \begin{array}{c|cc} & e & a \\ \hline e & 1 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{array}$$

Metodo di Wilf:

$$W(x) = (I - xT)^{-1}$$

dove I è la matrice identità.

Metodo di Calkin e Wilf: funzione generatrice

$$(I - xT)^{-1} = \begin{bmatrix} 1-x & -x \\ -x & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{1-x-x^2} \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & 1-x \end{bmatrix}$$

Sommando gli elementi della matrice:

$$W(x) = \frac{2+x}{1-x-x^2}$$

Metodo di Calkin e Wilf: funzione generatrice

Considerando il grafo vuoto:

$$1 + xW(x) = 1 + \frac{2x + x^2}{1 - x - x^2} = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

Funzione generatrice:

$$S(x) = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

Metodo di Calkin e Wilf: funzione generatrice

Considerando il grafo vuoto:

$$1 + xW(x) = 1 + \frac{2x + x^2}{1 - x - x^2} = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

Funzione generatrice:

$$S(x) = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\varnothing$$

Considerando il grafo vuoto:

$$1 + xW(x) = 1 + \frac{2x + x^2}{1 - x - x^2} = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

Funzione generatrice:

$$S(x) = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\varnothing, \{1\}$$

Metodo di Calkin e Wilf: funzione generatrice

Considerando il grafo vuoto:

$$1 + xW(x) = 1 + \frac{2x + x^2}{1 - x - x^2} = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

Funzione generatrice:

$$S(x) = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

$$\varnothing, \{1\}, \{2\}$$

Metodo di Calkin e Wilf: funzione generatrice

Considerando il grafo vuoto:

$$1 + xW(x) = 1 + \frac{2x + x^2}{1 - x - x^2} = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

Funzione generatrice:

$$S(x) = \frac{1 + x}{1 - x - x^2}$$

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 5x^3 + 8x^4 + 13x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

[Chomsky&Schützenberger '63, Gruger&Lee&Shallit '05]

$$S \to eS \mid aA \mid \lambda \qquad A \to eS \mid \lambda$$

Sistema di equazioni dalla grammatica:

$$\begin{cases} S(t) = & tS(t) + tA(t) + 1 \\ A(t) = & tS(t) + 1 \end{cases}$$

Funzione generatrice:

$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$$

$$S(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + \mathcal{O}(t^6)$$

Metodo con gli automi a stati finiti

[Chomsky&Schützenberger '63, Gruger&Lee&Shallit '05]

$$S \to eS \mid aA \mid \lambda \qquad A \to eS \mid \lambda$$

Sistema di equazioni dalla grammatica:

$$\begin{cases} S(t) = & tS(t) + tA(t) + 1 \\ A(t) = & tS(t) + 1 \end{cases}$$

Funzione generatrice:

$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$$

$$S(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + \mathcal{O}(t^6)$$

$$\lambda$$

Metodo con gli automi a stati finiti

[Chomsky&Schützenberger '63, Gruger&Lee&Shallit '05]

$$S \to eS \mid aA \mid \lambda \qquad A \to eS \mid \lambda$$

Sistema di equazioni dalla grammatica:

$$\begin{cases} S(t) = & tS(t) + tA(t) + 1 \\ A(t) = & tS(t) + 1 \end{cases}$$

Funzione generatrice:

$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$$

$$S(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + \mathcal{O}(t^6)$$

$$e, a$$

Metodo con gli automi a stati finiti

[Chomsky&Schützenberger '63, Gruger&Lee&Shallit '05]

$$S \to eS \mid aA \mid \lambda \qquad A \to eS \mid \lambda$$

Sistema di equazioni dalla grammatica:

$$\begin{cases} S(t) = & tS(t) + tA(t) + 1 \\ A(t) = & tS(t) + 1 \end{cases}$$

Funzione generatrice:

$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$$

$$S(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + \mathcal{O}(t^6)$$

ee, *ae*, *ea*

Metodo con gli automi a stati finiti

[Chomsky&Schützenberger '63, Gruger&Lee&Shallit '05]

$$S \to eS \mid aA \mid \lambda \qquad A \to eS \mid \lambda$$

Sistema di equazioni dalla grammatica:

$$\begin{cases} S(t) = & tS(t) + tA(t) + 1 \\ A(t) = & tS(t) + 1 \end{cases}$$

Funzione generatrice:

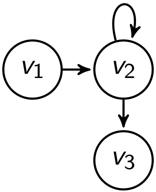
$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2}$$

$$S(t) = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + 13t^5 + \mathcal{O}(t^6)$$

Perché?

Proprietà interessante della matrice di adiacenza

Sia A la matrice di adiacenza del grafo orientato G. Allora $A^n[i,j]$ è il numero di cammini di G che hanno lunghezza n.

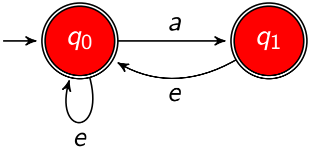


$$A = \begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$A^2 = \begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 1 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Perché?

Rappresentazione matriciale degli automi



$$M = \begin{array}{c|cc} & q_0 & q_1 \\ \hline q_0 & 1 & 1 \\ q_1 & 1 & 0 \end{array}$$

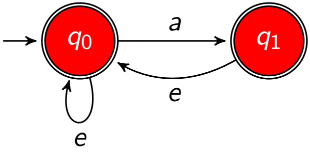
$$M^2 = \begin{array}{c|cc} & q_0 & q_1 \\ \hline q_0 & 2 & 1 \\ q_1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\delta(q_0, ee) = q_0, \delta(q_0, ae) = q_0$$

$$(I - xM)^{-1} = \frac{I}{I - xM} = \sum_{n \geq 0} (xM)^n = I + xM + x^2 M^2 + \ldots$$

Perché?

Rappresentazione matriciale degli automi



$$M = \begin{array}{c|cc} & q_0 & q_1 \\ \hline q_0 & 1 & 1 \\ q_1 & 1 & 0 \end{array}$$

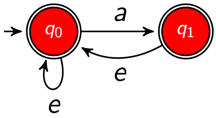
$$M^2 = \begin{array}{c|cc} & q_0 & q_1 \\ \hline q_0 & 2 & 1 \\ q_1 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\delta(q_0, ee) = q_0, \delta(q_0, ae) = q_0$$

$$(I - xM)^{-1} = \frac{I}{I - xM} = \sum_{n \geq 0} (xM)^n = I + xM + x^2 M^2 + \ldots$$

Perché?

Rappresentazione matriciale degli automi



$$\frac{I}{I - xM} = I + xM + x^2M^2 + \cdots =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x & x \\ x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x^2 & x^2 \\ x^2 & x^2 \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + x + 2x^2 + \mathcal{O}(x^3) & x + x^2 + \mathcal{O}(x^3) \\ x + x^2 + \mathcal{O}(x^3) & 1 + x^2 + \mathcal{O}(x^3) \end{bmatrix}$$

$$F(x) = 2 + 3x + 5x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

Dati il vettore caratteristico dello stato iniziale e il vettore degli stati finali,

$$\mathrm{A}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \Omega_f = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

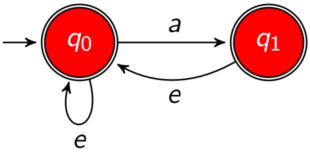
il numero di cammini dallo stato iniziale agli stati finali:

$$\mathrm{A}_i \frac{I}{I - xM} \Omega_f$$

Funzione generatrice:

$$S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \mathcal{O}(x^3)$$

La espressione regolare



Sistema di equazioni in variabili non commutative:

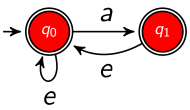
$$\begin{cases} L_0 = & eL_0 + aL_1 + \lambda \\ L_1 = & eL_0 + \lambda \end{cases}$$

$$L_0 = \frac{\lambda}{\lambda - (e + ae)}(a + \lambda)$$

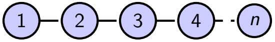
$$\frac{\lambda}{\lambda - (e + ae)} = \sum_{n \geq 0}(e+ae)^n = \lambda + (e+ae) + (e+ae)^2 + \cdots = (e+ae)^*$$

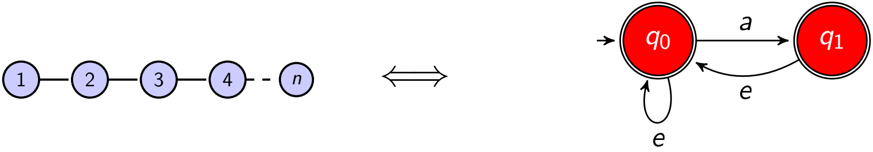
$$L(M) = (e + ae)^*(a + \lambda)$$

La biiezione



n	M	$*$	$P_n^{(1)}$
1	q_0	e	$\emptyset$
	q_1	a	$\{1\}$
2	$q_0 q_0$	ee	$\emptyset$
	$q_0 q_1$	ea	$\{2\}$
	$q_1 q_0$	ae	$\{1\}$
3	$q_0 q_0 q_0$	eee	$\emptyset$
	$q_0 q_0 q_1$	eea	$\{3\}$
	$q_0 q_1 q_0$	eae	$\{2\}$
	$q_1 q_0 q_0$	aee	$\{1\}$
	$q_1 q_0 q_1$	aea	$\{1, 3\}$





$$S(t) = \frac{1+t}{1-t-t^2} = 1 + 2t + 3t^2 + 5t^3 + 8t^4 + \mathcal{O}(t^5)$$

- Le funzioni generatrici ricavate con il metodo di Wilf e il metodo degli automi a stati finiti coincidono.
- Abbiamo mostrato una biiezione tra gli insiemi indipendenti dei cammini di potenza uno e il linguaggio accettato da un automa a stati finiti.

N. Chomsky and M.P. Schützenberger.
The Algebraic Theory of Context-Free Languages.
In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 35, pages 118–161. Elsevier, 1963.

Jonathan Lee and Jeffrey Shallit.
Enumerating Regular Expressions and Their Languages.
In *Implementation and Application of Automata*, volume 3317, pages 2–22. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.

Neil J. Calkin and Herbert S. Wilf.
The Number of Independent Sets in a Grid Graph.
SIAM Journal on Discrete Mathematics, 11(1):54–60, 1998.

Approfondimenti II

Pietro Codara and Ottavio M. D'Antona.
Investigating Independent Subsets of Graphs, with Mathematica.
CoRR, abs/1307.1335, 2013.

Verner E. Hoggatt.
Combinatorial Problems for Generalized Fibonacci Numbers.
Fibonacci Quarterly, 8(5), 456–462, 1970.